CÓNICAS:

CÓNICAS EN COORDENADAS HOMOGÉNEAS

por

DANILO MAGISTRALI



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-10

CÓNICAS:

CÓNICAS EN COORDENADAS HOMOGÉNEAS

por

DANILO MAGISTRALI

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-10

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Cónicas. Cónicas en coordenadas homogéneas.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 416.01 / 3-89-10
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-481-3
ISBN-13: 978-84-9728-483-7
Depósito Legal: M-30289-2013

Índice

Índice de figuras

Cónicas en coordenadas homogéneas

1. Introducción

Un punto $\mathbf{x} = (x, y)^T$ está sobre la recta $\mathbf{l} \equiv (a, b, c)^T$ si y sólo si $ax + by + c = 0$. Esta ecuación puede escribirse como un producto interno de vectores,

$$(x, y, 1) \cdot (a, b, c)^T = 0$$

es decir, el punto $\mathbf{x} = (x, y)^t$ ha sido representado como un vector de tres componentes añadiendo una tercera coordenada 1.

Debemos notar que para cualquier constante k distinta de cero, se seguirá verificando la misma igualdad $(kx, ky, k)^T \mathbf{l} = 0$. Es por tanto natural considerar el conjunto de vectores $(kx, ky, k)^T$ para distintos valores de k como la representación del punto $(x, y)^T$ en $\mathbb{R}^2$. Por tanto al igual que con las rectas, los puntos se representan por vectores. Un vector arbitrario representante de un punto es de la forma $\mathbf{x} = (x, y, t)^T$, representando el punto $(x/t, y/t)^T$ en $\mathbb{R}^2$.

Del resultado anterior se deduce que un punto $\mathbf{x}$ está sobre una línea $\mathbf{l}$ si y sólo si se verifica $\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$. Es evidente que para especificar un punto habrá que dar dos valores: sus coordenadas x e y. De igual manera para especificar una recta habrá que dar dos parámetros (los dos cocientes independientes $(\frac{a}{b}, \frac{b}{b})$ con $b \neq 0$) y por tanto tan sólo tiene dos grados de libertad.

Por ejemplo el punto $P(2, 4)$ vendrá expresado en coordenadas homogéneas por cualquiera de las infinitas ternas $(2, 4, 1), (4, 8, 2), (-4, -8, -2), \ldots$ El punto $(0, 0) \equiv (0, 0, 1)$.

Uno de los aspectos más engorrosos del estudio de la geometría en el espacio afín es la necesidad de distinguir constantemente entre puntos impropios (del infinito) y puntos propios. Por ejemplo, en el caso de la intersección de rectas paralelas se conoce que no tiene solución en el caso Euclídeo y se dice que se intersecan en el infinito. La geometría proyectiva permite abordar el estudio de propiedades de intersección de puntos y rectas sin necesidad de hacer distinción entre rectas paralelas y no paralelas.

Es de interés analizar cuál será la solución de la interesección de rectas paralelas. Puede verse sin dificultad que en estos casos el vector que representa la solución tendrá obligatoriamente su tercera coordenada igual a cero, lo que corresponde a un punto fuera del plano. Por tanto, podemos decir que los puntos de $\mathbb{R}^2$ están representados por vectores de $\mathbb{R}^3$ con tercera coordenada

$t = 0$. Los puntos de $\mathbb{R}^3$ con tercera coordenada igual a cero, $t = 0$, se denominan puntos impropios o *puntos del infinito*. Notaremos que el conjunto de los puntos impropios, $(x, y, 0)^T$, está sobre una recta que llamaremos recta del infinito y cuyo vector es $\mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)^T$. Al plano al que se le adjunta la recta del infinito se le denomina *plano completado*.

Podemos resumir diciendo que dado un punto $P(x, y)$, por definición se llaman coordenadas homogéneas de dicho punto a toda terna (x_1, y_1, t), tal que $x = \frac{x_1}{t}, y = \frac{y_1}{t}$.

Por ejemplo, la recta $y = 3x + 2$ tiene como vector director $v = (1, 3)$. El punto impropio $(1, 3, 0)$ señala la dirección de todas las rectas paralelas a ella. En ese punto todas las rectas paralelas se cortan.

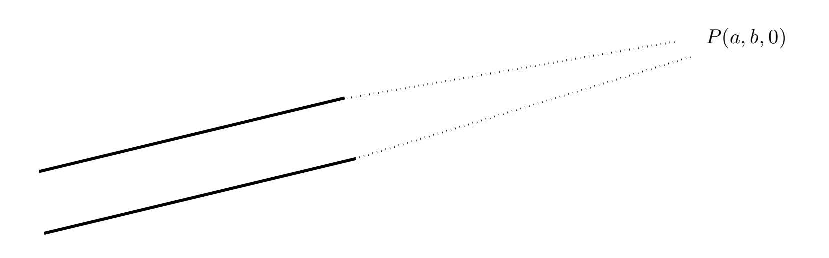


Figura 1: Dos rectas paralelas con dirección (a, b) se encuentran en un punto del infinito de coordenadas homogéneas $P = (a, b, 0)$.

2. La recta en coordenadas homogéneas

Dada una recta r que tiene ecuación $ax + by + c = 0$ para obtener la expresión en coordenadas homogéneas simplemente sustituimos (x, y) por $(x/t, y/t)$. De manera que la ecuación de la recta r en coordenadas homogéneas es

$$ax + by + ct = 0$$

Ahora queremos que pase por dos puntos $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$. Entonces dado un punto $(x, y, t) \in r$, el vector (x, y, t) tendrá que ser combina-

ción lineal de los vectores (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3). Es decir que el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

de aquí sigue que

$$\begin{cases} x = \alpha p_1 + \beta q_1 \\ y = \alpha p_2 + \beta q_2 \\ t = \alpha p3 + \beta q_3 \end{cases}$$

de forma más compacta, si ponemos $X = (x, y, t)$, tenemos que

$$X = \alpha P + \beta Q$$

3. Expresión de una cónica en coordenadas homogéneas

Dada una cónica $\mathcal{C}$ de ecuación cartesiana

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

se puede escribir en coordenadas homogéneas como

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt = 0$$

y su expresión matricial es

$$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{ó de forma más compacta} \qquad X^t A X = 0$$

donde $X^T = (x, y, t)^T$ y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Podemos definir la cónica como el lugar geométrico de los puntos X que son conjugados de sí mismos.[1]

[1] Recordamos que dos vector $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ son conjugados respecto de una matriz A si $\mathbf{v}^t A \mathbf{w} = 0$.

4. Recta polar y polo

Se llama polar de un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ respecto de la cónica $X^tAX = 0$ al lugar geométrico de los puntos $X(x, y, t)$ conjugados de P respecto de la cónica. La polar de P será

$$X^tAP = 0 \qquad \text{es decir} \quad (x, y, t)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$$

Si calculamos el producto matricial AP, tenemos

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 \end{pmatrix}$$

Recordamos que estas cantidades son números reales así que podemos renombrarlas de la siguiente manera

$$\begin{cases} a = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \\ b = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \\ c = a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 \end{cases}$$

De esa manera tenemos que

$$p \equiv X^tAP = ax + by + ct = 0$$

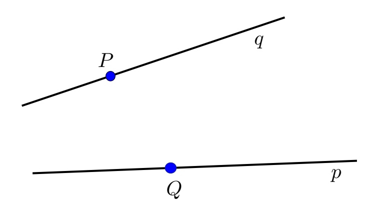
Vemos que la polar p de un punto respecto de una cónica es una recta. Al punto P se le denomina *polo*.

Es importante recordar que:

- Existe una correspondencia biyectiva, en cónicas no degeneradas, entre polares de puntos y polos de rectas.
- Si P y Q son conjugados respecto de la matriz de una cónica, la polar de P pasa por Q y la polar de Q pasa por P.

Se puede demostrar que si un punto P pertenece a una recta q, la recta polar del punto P que llamaremos p contiene al polo de q.

De hecho, siendo la ecuación de la recta polar p, $X^tAP = 0$ hay que probar que el punto Q verifica esta ecuación, es decir, $Q^tAP = 0$, en tal caso significa que $Q \in p$.



La recta polar q tiene ecuación $X^tAQ = 0$ y sabemos que $P \in q$ es decir $P^tAQ = 0$. Siendo la matriz A simétrica resulta que

$$(P^tAQ)^T = Q^TAP = 0$$

Podemos enunciar el siguiente

Teorema fundamental de la polaridad

Las polares de todos los puntos de una recta pasan por el polo de dicha recta.

Ejemplo. *Hallar las polares de los puntos* $P(1,1,1)$ y $Q(-1,-1,0)$ *respecto de la cónica*

$$x^2 + y^2 + 2x - 2xy - 1 = 0$$

La expresión matricial de la cónica en coordenadas homogéneas es:

$$(x,y,t)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$$

La polar de $P(1,1,1)$ será

$$(1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{es decir} \quad x = 0$$

La polar de Q es

$$(-1,-1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{es decir} \quad t = 0$$

Ejemplo. *Hallar el polo de la recta* $x + y - 2 = 0$ *respecto de la cónica* $x^2 - 2xy + 1 = 0$.

La expresión matricial de la cónica en coordenadas homogéneas es:

$$(x, y, t)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Podemos resolver el problema de dos maneras:

a) Si $P(x_1, y_1, t_1)$ es el polo de la recta $r \equiv x + y - 2t = 0$, la polar de P será r. La polar de P es

$$(x_1, y_1, t_1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$$

es decir

$$(x_1 - y_1)x - x_1 y + t_1 t = 0$$

entonces debe ser

$$\frac{x_1 - y_1}{1} = \frac{-x_1}{1} = \frac{t_1}{-2} = \lambda \quad \text{de donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\lambda \\ y_1 = -2\lambda \\ t_1 = -2\lambda \end{array} \right.$$

Entonces $P(-\lambda, -2\lambda, -2\lambda)$ tiene coordenadas cartesianas $P(\frac{1}{2}, 1)$.

b) El polo de r será la intersección de las polares de dos puntos cualesquiera de r. Por ejemplo sean $R(1, 1)$ y $Q(2, 0)$ dos punto de r. La polar de R es

$$(1, 1, 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{de donde} \quad y = 1$$

La polar de Q es

$$(2, 0, 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{de donde} \quad 2x - 2y + 1 = 0$$

Ahora hacemos la intersección de las dos polares

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = 1 & \text{polar de } R \\ 2x - 2y + 1 = 0 & \text{polar de } Q \end{array} \right.$$

que da $P(\frac{1}{2}, 1)$.

5. Intersección de una cónica con una recta

Sea r la recta que tiene ecuación $X = \alpha P + \beta Q$ donde $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$ son dos puntos y α, $\beta \in \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{C} \equiv X^t AX = 0$ una cónica. Veamos la posición relativa de la recta r y la cónica $\mathcal{C}$.

Se trata de calcular los pares (α, β) que verifican las ecuaciones de r y $\mathcal{C}$, luego tendremos que resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} X^t AX = 0 \\ X = \alpha P + \beta Q \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha P + \beta Q)^t A(\alpha P + \beta Q) = 0$$

Tenemos la siguiente ecuación de segundo grado

$$\alpha^2 P^t AP + 2\alpha\beta P^t AQ + \beta^2 Q^t AQ = 0$$

Supongamos que $P^t AP \neq 0$, es decir, P no pertenece a $\mathcal{C}$ y por tanto, $\beta \neq 0$

$$P^t AP \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2P^t AQ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + Q^t AQ = 0$$

el discriminante de esta ecuación es

$$\Delta = (P^t AQ)^2 - (P^t AP)(Q^t AQ) \tag{1}$$

Dependiendo del valor de Δ tenemos tres casos

1. Si $\Delta > 0$ la recta r es secante a la cónica.

2. Si $\Delta = 0$ la recta r es tangente a la cónica.

3. Si $\Delta < 0$ la recta r es exterior a la cónica.

Ejemplo. *Hallar la intersección de* $x^2 + y^2 = 25$, *con la recta que pasa por los puntos* $P(0, 0)$ y $Q(8, 6)$.

La matriz A asociada a la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}, \quad P = (0, 0, 1), \quad Q = (8, 6, 1)$$

Tenemos que los coeficientes de la ecuación de segundo grado que nos da la intersección de la recta con la cónica son

$$P^t AP = -25, \quad P^t AQ = -25, \quad Q^t AQ = 75$$

la ecuación entonces resulta

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta, \quad \alpha = -3\beta$$

Para $\alpha = \beta$ tenemos $X = \alpha(0,0,1) + \beta(8,6,1) = (8\beta, 6\beta, 2\beta)$ que corresponde al punto $(4,3,1) \equiv (4,3)$.

Para $\alpha = -3\beta$ tenemos $X = -3\beta(0,0,1) + \beta(8,6,1) = (8\beta, 6\beta, -2\beta)$ que corresponde al punto $(-4,-3,1) \equiv (-4,-3)$.

6. Intersección de una cónica con la recta del infinito

Sean $X^tAX = 0$ una cónica y sea $t = 0$ la recta del infinito o recta impropia. Hemos visto que la intersección de una elipse con la recta del infinito no tiene ningún punto, con la hipérbola tiene dos puntos y con la parábola tiene un punto.

El sistema

$$\begin{cases} X^tAX = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y)A_{33}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

Si $x \neq 0$ tenemos

$$a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{y}{x}\right) + a_{11} = 0$$

El discriminante de esta ecuación es

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -|A_{33}|$$

Luego

a) Si $|A_{33}| < 0$ tenemos dos soluciones, es decir la cónica es una hipérbola.

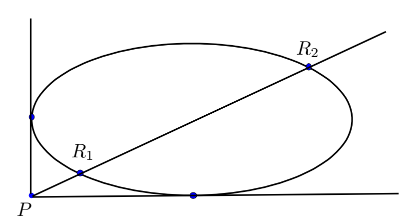
b) Si $|A_{33}| = 0$ tenemos una solución, es decir la cónica es una parábola.

c) Si $|A_{33}| > 0$ no tenemos soluciones, es decir la cónica es una elipse.

7. Tangente desde un punto que no pertenece a la cónica

Sea $\mathcal{C} \equiv X^tAX = 0$ una cónica no degenerada ($|A| \neq 0$) y sea P un punto fijo, $\forall Y$ el haz de rectas que pasa por P es $X = \alpha P + \beta Y$.

Calculamos los puntos R_1, R_2 intersección de la cónica con la recta genérica por P. La ecuación de la intersección es



$$\alpha^2 P^tAP + 2\alpha\beta P^tAY + \beta^2 Y^tAY = 0$$

La recta tangente viene dada por la condición de que el discriminante sea cero.

$$\Delta = (P^tAY)^2 - (P^tAP)(Y^tAY) = 0 \qquad (2)$$

Esta es la ecuación de la recta tangente a la cónica desde un punto que no pertenece a la cónica.

8. Tangente en un punto de la cónica

Si es punto $P \in \mathcal{C}$ significa que es autoconjugado con respecto de la cónica, es decir $P^tAP = 0$. La ecuación 2 se transforma en

$$(P^tAY)^2 - (P^tAP)(Y^tAY) = 0 \quad \Rightarrow \quad (P^tAY) = 0 \quad \text{que es la ecuación de la polar de } P$$

La recta tangente a la cónica en un punto de la misma es la polar de dicho punto. Cuando el punto P es un punto del infinito de la cónica, la tangente en P recibe el nombre de asíntota. Por tanto las asíntotas son las tangentes a las cónicas en sus puntos del infinito.

9. Elementos notables de una cónica

9.1. Centro

Sea $\mathcal{C} \equiv X^t A X = 0$ una cónica no degenerada ($|A| \neq 0$) y C un punto propio. Se define el centro C de una cónica como el polo de la recta del infinito ($t = 0$).

La recta polar del punto $C = (c_1, c_2, c_3)$ es por definición

$$(c_1, c_2, c_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$$

La ecuación de la polar entonces es

$$(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3)x + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3)y + (a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3)t = 0$$

El centro satisface

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 = 0 \\ a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3 = k \end{cases}$$

Luego el centro tiene coordenadas

$$C = (A_{13}, A_{23}, A_{33}) \quad \text{siendo } A_{ij} \text{ el adjunto del elemento } a_{ij}$$

La parábola es tangente a la recta del infinito por tanto el polo de la recta del infinito es el punto de tangencia, que está en el infinito, así que la parábola no tiene centro propio.

9.2. Rectas conjugadas

Sea $\mathcal{C} \equiv X^t A X = 0$ una cónica y r y s dos rectas. M es el polo de r y N es el polo de s.

Se dice que r y s son conjugadas respecto de $\mathcal{C}$ si $M \in s \wedge N \in r$.

9.3. Diámetros

Se denomina diámetro de una cónica no degenerada a la polar de cualquier punto impropio.

Todos los diámetros pasan por el centro de la cónica.

Si la cónica es una parábola todos los diámetros son paralelos ya que el centro es un punto impropio.

9.4. Diámetros conjugados

Un diámetro d' está conjugado con uno dado d si cada uno de ellos contiene al polo del otro.

9.5. Ejes

Los ejes de una cónica son diámetros conjugados y perpendiculares[2].

Sean $P = (p_1, p_2, 0)$ y $Q = (q_1, q_2, 0)$ punto impropios de los ejes.

Por ser ortogonales se cumple

$$p_1q_1 + p_2q_2 = 0$$

y por ser conjugados

$$(p_1, p_2, 0)A \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)q_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2)q_2 = 0$$

El sistema

$$\begin{cases} p_1q_1 + p_2q_2 = 0 \\ (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)q_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2)q_2 = 0 \end{cases}$$

tiene solución no trivial si la matriz de los coeficientes tiene determinante cero

$$\begin{vmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 & a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = \lambda p_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \lambda p_2 \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 = 0 \\ a_{12}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + A_{33} = 0$$

Se calculan los valores de λ, se calculan los punto P y Q y la rectas polares que pasan por ellos.

Otro método es calcular la direcciones de los ejes y luego calcular las polares de la direcciones de los ejes que serán los ejes.

[2]Recordamos que los coeficientes angulares de dos rectas perpendiculares satisfacen la siguiente relación: $m' = -\frac{1}{m}$.

Las direcciones de los ejes se encuentran calculando los autovectores de la parte principal de la ecuación de la cónica

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Llamamos $\overrightarrow{e}_1 = (a, b)$ y $\overrightarrow{e}_2 = (c, d)$ los dos autovectores

El eje en la dirección de $\overrightarrow{e}_1$ será la polar de la dirección $\overrightarrow{e}_2$

$$(a, b, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

El eje en la dirección de $\overrightarrow{e}_2$ será la polar de dirección $\overrightarrow{e}_1$

$$(c, d, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Los ejes de una cónica son ejes de simetría de la misma.

9.6. Asíntotas

Las asíntotas de una cónica no degenerada son las tangentes a la cónica en sus puntos impropios. Por tanto, serán las polar en sus punto del infinito.

Para calcular las asíntotas seguiremos los siguientes pasos

1. Se calculan lo puntos del infinito de la cónica, es decir su intersección con la recta impropia.

2. Calculamos las polares de dichos puntos impropios y las rectas obtenidas son sus asíntotas.

La elipse no tiene asíntotas, la parábola tiene una sola, la recta impropia, y la hipérbola tiene dos.

Ejemplo. *Sea $\mathcal{C}$ la cónica de ecuación*

$$x^2 + y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$$

a) *Clasificarla*

$$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$$

tenemos que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0 \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

Entonces es una cónica no degenerada ($|A| \neq 0$) y es una hipérbola real ($|A_{33}| < 0$).

b) *Centro*. Podemos usar la fórmula

$$C = (A_{13}, A_{23}, A_{33}) = (-5, 7, -3) \equiv \left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 1\right)$$

Otro método el siguiente. El centro de una cónica es el polo de la recta impropia. Tomamos dos puntos cualesquiera de la recta impropia ($t = 0$), por ejemplo $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$. Ahora calculamos las rectas polares de los puntos A y B.

La polar por el punto A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 3 = 0$$

c) La polar por el punto B es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 1 = 0$$

El centro es la solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad C = \left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

d) *Las asíntotas.*

Las asíntotas son la rectas tangentes a la cónica en sus puntos del infinito.

Calculamos los puntos del infinito de la cónica calculando su intersección con la recta impropia

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+4xy+6xt-2yt+t^2=0 \\ t=0 \end{array}\right. \Rightarrow x^2+y^2+4xy=0 \Rightarrow x=\left\{\begin{array}{l} (-2+\sqrt{3})y \\ (-2-\sqrt{3})y \end{array}\right.$$

Los puntos impropios son $A=(-2+\sqrt{3},1,0)$ y $B=(-2-\sqrt{3},1,0)$. Las asíntotas serán las polares de estos puntos.

Una asíntota es

$$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \sqrt{3}x+(-3+2\sqrt{3})y=0$$

La otra asíntota es

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow -\sqrt{3}x+(-3-2\sqrt{3})y=0$$

e) *Los ejes.*

Los ejes de una cónica son diámetros conjugados y perpendiculares. Si m y m' son las pendientes de las rectas de los ejes tenemos $m'=-\frac{1}{m}$.

Además por ser conjugados sus direcciones son conjugadas

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v}_1=(1,m) \\ \overrightarrow{v}_2=(1,m')=(1,-\frac{1}{m}) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix}=0$$

de donde

$$(1+2m)+(2+m)\left(-\frac{1}{m}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad m=\pm 1$$

Entones las ecuaciones de los ejes serán

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow 3x+3y+2=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

Otro método es calcular la recta que pasa por el centro y tiene pendiente $m = 1$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{7}{3} = 1\left(x - \frac{5}{3}\right) \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

y la recta que pasa por el centro y tiene pendiente $m = -1$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{7}{3} = -1\left(x - \frac{5}{3}\right) \Rightarrow 3x + 3y + 2 = 0$$

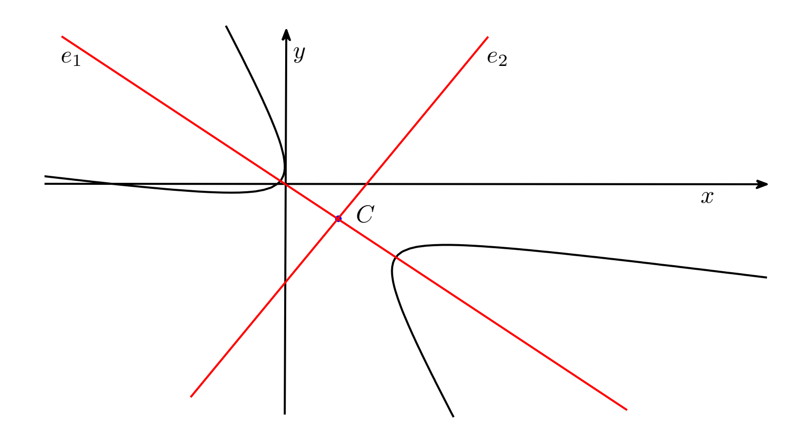


Figura 2: Gráfica de la hipérbola $x^2 + y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$

Ejemplo. *Dadas las siguientes rectas*

$$\begin{cases} r_1 \equiv x - y - 3 = 0 \\ r_2 \equiv x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

Se pide

a) *Crear la cónica degenerada*

$$\mathcal{C} \equiv (x-y-3)(x+y+5) = x^2 - y^2 + 2x - 8y - 15 = 0$$

b) *Clasificar la cónica*

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Tenemos que $|A| = 0$ y que $A_{33} = -1 < 0$. Es decir es una hipérbola degenerada en dos rectas que se cortan en un punto real.

c) *Encontrar los puntos singulares*

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -4 \end{array} \right.$$

Ejemplo. *Dadas las siguientes rectas*

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \equiv 2x + y + 5 = 0 \\ r_2 \equiv 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Se pide

a) *Crear la cónica degenerada*

$$\mathcal{C} \equiv (2x+y+5)(2x+y-1) = 4x^2 + y^2 + 4xy + 8x + 4y - 5 = 0$$

b) *Clasificar la cónica*

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

tenemos que $|A| = 0$ y que $A_{33} = 0$, es decir una parábola degenerada en dos rectas paralelas distintas.

c) *Puntos singulares.*

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Que son las rectas paralelas r_1 y r_2 que se encuentran en el infinito en el punto singular $A = (1, -2, 0)$.

Ejemplo. *Dada la cónica de ecuación*

$$x^2 + y^2 - 1 + xy + x + y = 0$$

Se pide

a) *Expresión matricial*

$$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$$

b) *Clasificación* Tenemos que $|A| = -1 \neq 0$, $|A_{33}| = 3/4 > 0$, $c = -\frac{|A|}{|A_{33}|} > 0$ entonces es una elipse real.

c) *Centro.* Es el polo de la recta del infinito. Sea $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$ dos puntos del infinito. Calculamos sus rectas polares

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 1 = 0$$

El centro es la intersección de las dos polares

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

d) *Ejes.* Son los diámetros conjugados y perpendiculares. Calculamos los autovectores $\overrightarrow{v}_1$ y $\overrightarrow{v}_2$ de A_{33}

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

El subespacio invariante asociado a $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ es $\overrightarrow{v}_1 = (1,1)$ y el subespacio invariante asociado a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ es $\overrightarrow{v}_2 = (1,-1)$ Ahora calculamos la polar en la dirección $\overrightarrow{v}_1 = (1,1)$ que es un eje

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2 = 0$$

Ahora calculamos la polar en la dirección $\overrightarrow{v}_2 = (1,-1)$ que es el otro eje

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y = 0$$

e) *Polo de la recta de ecuación $r \equiv x - y + 1 = 0$.*

Calculamos las polares de dos puntos arbitrarios de r. Por ejemplo $P = (0,1)$ y $Q = (-1,0)$. La recta polar de P es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad p \equiv 2x + 3y + 1 = 0$$

y la recta polar de Q es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad q \equiv x + 3 = 0$$

El polo es la intersección de p y q

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 5/3 \end{array} \right.$$

f) *La ecuación reducida.* Sabemos que la ecuación reducida de una elipse es de la forma

$$AX^2 + BY^2 + C = 0$$

Utilizando invariantes (un teorema que nos asegura las cantidades $|A|$, $|A_{33}|$, $(a_{11}+a_{33})$ se conservan bajo traslaciones y rotaciones)

$$\begin{cases} |A| = ABC = -1 \\ |A_{33}| = AB = \frac{3}{4} \\ a_{11} + a_{22} = A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \\ C = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

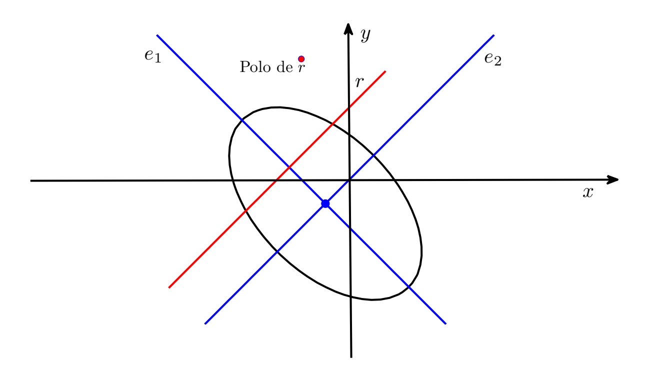


Figura 3: Gráfica de la elipse $x^2 + y^2 - 1 + xy + x + y = 0$

Ejemplo. *Dada la cónica de ecuación*

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 12y + 13 = 0$$

Se pide

a) *Centro.* La expresión matricial de la cónica es

$$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & -6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$$

El centro tiene coordenadas

$$C = (A_{13}, A_{23}, A_{33}) = (-2, 6, 2) \equiv (-1, 3)$$

b) *La recta tangente a la elipse en el punto* $P = (1,2)$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & -6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r \equiv x - y + 1 = 0$$

c) *Ecuación matricial de la homotecia* h *de centro el centro de la elipse y razón* $k = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

d) *Ecuación matricial de la simetría axial* S_r, *respecto de la recta* r.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

e) *Sea* $C' = (S_r \circ h)C$. *¿Es una elipse?*

$$S_r \circ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 13 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

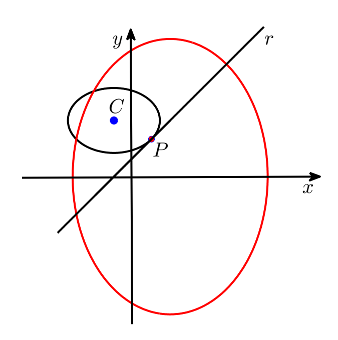


Figura 4: La elipse se transforma en otra elipse después de la homotecia y de la simetría axial.

C' es una elipse porque el resultado de multiplicar una homotecia que tiene centro en el origen expande la la cónica, y la simetría respecto de

la recta r desplaza la cónica en el plano. Ninguna de las dos transformaciones cambia la forma de la elipse.

10. Haces de cónicas

10.1. Introducción

Dadas las cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de ecuaciones:

$$X^t A_1 X = 0 \quad \text{y} \quad X^t A_2 X = 0$$

el haz de cónicas generado por ellas corresponde a la familia de cónicas de ecuaciones:

$$\alpha(X^t A_1 X) + \beta(X^t A_2 X) = 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Las cónicas de un haz heredan propiedades comunes de las cónicas que lo generan.

1. Si P es un punto común de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, entonces P pertenece a todas las cónicas del haz.

2. Si r es una tangente a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en un punto P, entonces r también es tangente en P a todas las cónicas del haz.

3. Si r es una asíntota común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ entonces r también es asíntota de todas las cónicas del haz.

4. Si P es un punto singular de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ entonces P es un punto singular de todas las cónicas del haz.

5. Si P es el centro de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ entonces P es el centro de todas las cónicas del haz.

También se puede decir que el haz de cónicas determinados por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es la familia de las cónicas que pasan por cuatro puntos, reales o imaginarios, confundidos o distintos, que constituyen la intersección de las cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

En todo haz de cónicas hay tres cónicas degeneradas, reales o imaginarias, distintas o confundidas, correspondientes a los valores de α, β que hacen $|\alpha A_1 + \beta A_2| = 0$

Teniendo en cuenta este hecho, veamos cómo construir las familias de cónicas que cumplen algunas de estas condiciones.

10.2. Construcción de haces de cónicas

Para escribir la ecuación del haz de cónicas necesitamos conocer la ecuación de dos cónicas de él, y lo más cómodo, en general, es utilizar cónicas degeneradas del haz, es decir cónicas de la forma $r \cdot s = 0$, siendo $r = 0$ y $s = 0$ rectas. Estudiaremos los haces determinados por dos cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que se cortan en cuatro puntos reales.

1. *Haz de cónicas por cuatro puntos no alineados.* Supongamos que A, B, C, D son cuatro puntos no alineados. Consideramos las rectas

$$r_1 \equiv AB, \quad r_2 \equiv CD, \quad s_1 \equiv AC, \quad s_2 \equiv BD$$

El correspondiente haz es

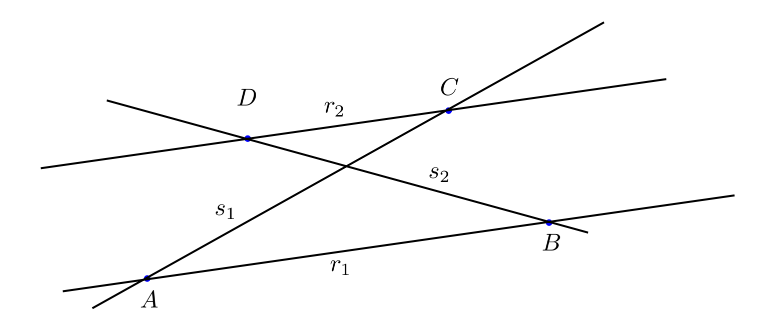


Figura 5: Haz de cónicas por cuatro puntos no alineados.

$$\alpha(r_1 \cdot r_2) + \beta(s_1 \cdot s_2) = 0$$

2. *Haz de cónicas por tres puntos no alineados y la tangente es uno de ellos.*

Supongamos que A, B, C son tres puntos no alineados y tg_A es la tangente en A. Consideramos las rectas

$$r_1 \equiv AB, \quad r_2 \equiv AC, \quad s \equiv BC$$

El correspondiente haz es

$$\alpha(r_1 \cdot r_2) + \beta(s \cdot tg_A) = 0$$

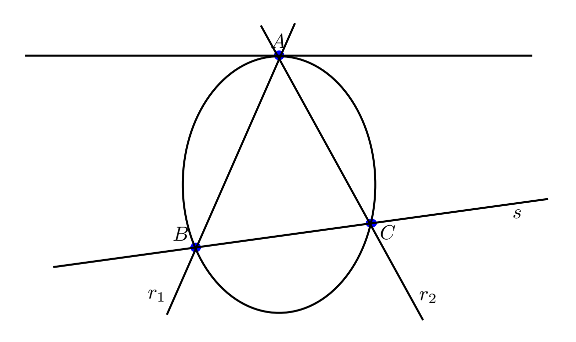


Figura 6: Haz de cónicas por tres puntos no alineados y la tangente en uno de ellos.

3. *Haz de cónicas que pasa por dos puntos y la tangente en ellos.* Supongamos que A, B son dos puntos y tg_A, tg_B las correspondiente tangentes. Consideramos la recta

$$r \equiv AB$$

El correspondiente haz es

$$\alpha r^2 + \beta(tg_A \cdot tg_B) = 0$$

4. *Haz de cónicas que pasa por cuatro puntos reales, tres de ellos confundidos.* Estos puntos representan las intersección de dos cónicas que se cortan en dos puntos, uno de ellos triple. Supongamos que el punto triple se llame A y el otro B. Estas cónicas reciben el nombre de *osculatrices*. En este caso necesitamos conocer la ecuación de una cónica del haz $c = 0$, y el problema es calcular el haz de cónicas osculatrices con $\mathcal{C}$ en un punto A y que pasen por B. Si tg_A es la tangente común

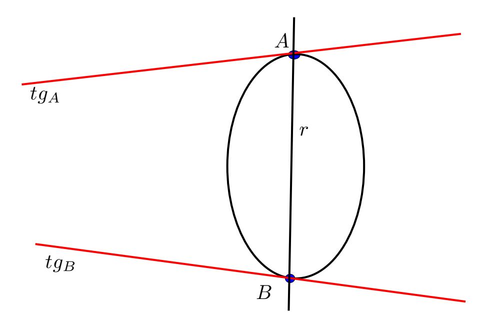


Figura 7: Haz de cónicas que pasa por dos puntos y las tangentes en ellos.

en A (será la polar del punto A respecto de la cónica $c = 0$) la ecuación del haz de cónicas es

$$\alpha(r \cdot tg_A) + \beta c = 0 \quad r \equiv AB$$

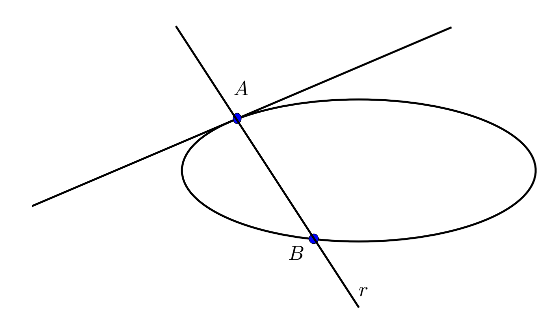


Figura 8: Haz de cónicas que pasa por cuatro puntos reales, tres de ellos confundidos

5. *Haz de cónicas bitangentes a dos rectas en los punto de corte.*

   Dadas las recta r_1, r_2 y s que corta r_1 y r_2 en dos puntos podemos

escribir el haz de cónicas H bitangentes a r_1 y r_2 en los puntos de corte de la siguiente manera:

$$H \equiv \alpha r_1 r_2 + \beta s^2 = 0$$

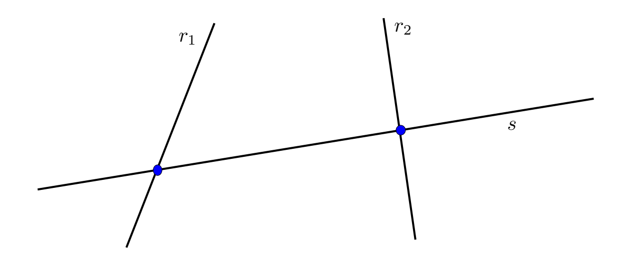


Figura 9: Haz de cónicas bitangente a dos rectas en los puntos de corte con otra.

Ejemplo. *Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el origen de coordenadas y tiene las tangentes en los puntos $P(1,0)$ y $Q(0,1)$ perpendiculares a la recta que pasa por P y por Q.*

La recta que pasa por PQ es

$$r \equiv x - y - 1 = 0 \quad \text{que tiene vector dirección } \overrightarrow{v} = (1,1)$$

La tangente que pasa por P y tiene como dirección el vector $v^{\perp} = (1,-1)$ es

$$tg_P \equiv x + y - 1 = 0$$

y la tangente que pasa por Q y tiene como dirección el vector $v^{\perp} = (1,-1)$ es

$$tg_Q \equiv x + y + 1 = 0$$

El haz de cónicas es (bitangente)

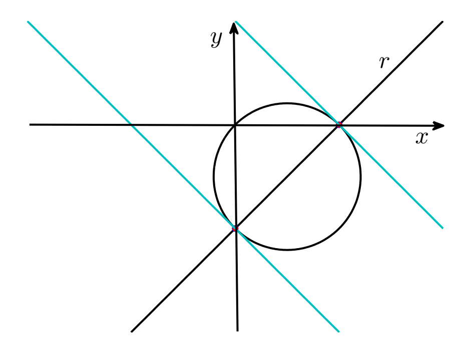
$$\mathcal{C} \equiv \alpha(x+y-1)(x+y+1) + \beta(x-y-1)^2 = 0$$

Podemos dividir todo por α y tenemos una ecuación equivalente

$$\mathcal{C} \equiv (x+y-1)(x+y+1) + \lambda(x-y-1)^2 = 0$$

Si imponemos que $\mathcal{C}$ pasa por el origen de coordenadas tenemos que $\lambda = 1$. La cónica será entonces (véase figura 10.2)

$$\mathcal{C} \equiv (x+y-1)(x+y+1) + (x-y-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y = 0$$



Ejemplo. *Hallar la ecuación de una parábola tangente a los ejes coordenados en los puntos $P(2,0)$ y $Q(0,2)$. Calcular el eje de la parábola.*

Sea $r \equiv PQ$, las dos tangentes coinciden con los ejes coordenados. El haz de cónicas es

$$H \equiv \alpha x \cdot y + \beta r^2 = 0, \quad tg_P \equiv y = 0, \quad tg_Q \equiv x = 0, \quad r \equiv x + y - 2 = 0,$$

entonces

$$H \equiv \alpha xy + \beta(x^2 + y^2 + 2xy + 4 - 4x - 4y) = 0$$

La matriz del haz es

$$\begin{pmatrix} \beta & \frac{\alpha+2\beta}{2} & -2\beta \\ \frac{\alpha+2\beta}{2} & \beta & -2\beta \\ -2\beta & -2\beta & 4\beta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2\beta & \alpha+2\beta & -4\beta \\ \alpha+2\beta & 2\beta & -4\beta \\ -4\beta & -4\beta & 8\beta \end{pmatrix}$$

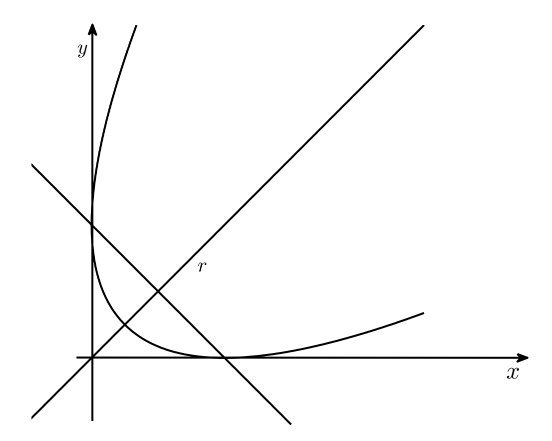
La condición de ser parábola es $|A_{33}| = 0$; esto es,

$$\begin{vmatrix} 2\beta & \alpha+2\beta \\ \alpha+2\beta & 2\beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 ó \alpha = -4\beta$$

Cuando $\alpha = 0$ volvemos a tener dos recta coincidentes ($r^2 = 0$).

Cuando $\alpha = -4\beta$ tenemos la parábola (véase figura 10.2).

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4 - 4x - 4y = 0$$



Eje de la parábola.

La expresión matricial de la parábola

$$\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 2xy + 4 - 4x - 4y = 0$$

es

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Los autovalores de A_{33} son $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$. El autovector asociado a $\lambda = 0$ es $v_1 = (1, 1)$ y el autovector asociado a $\lambda = 2$ es $v_2 = (1, -1)$.

Por tanto los ejes de la cónica son las rectas polares de los puntos impropios $P_1 = (1, -1, 0)$ y $P_2 = (1, 1, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x+y=0$$

Ejemplo. *Dada la cónica $\mathcal{C}$ que tiene ecuación*

$$1-x^2-y^2+4xy=0$$

obtener las tangentes a la cónica paralelas a la recta $1+x-2y=0$

Escrita en forma matricial la cónica es

$$\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0$$

Todas las rectas paralelas se encuentran en el mismo punto impropio. Así que todas las rectas paralelas a $1+x-2y=0$ se encuentra en el punto $P(2,1,0))$. El punto P no pertenece a la cónica.

Ahora calculamos la polar del punto P.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow y=0$$

La intersección de la polar con la cónica nos da

$$\begin{cases}1-x^2-y^2+4xy=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow x=\pm 1$$

Así que los puntos de intersección son $T_1=(1,0)$ y $T_2=(-1,0)$.

Ahora calculamos las polares de los puntos $T_1=(1,0)$ y $T_2=(-1,0)$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x-2y-1=0$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x-2y+1=0$$

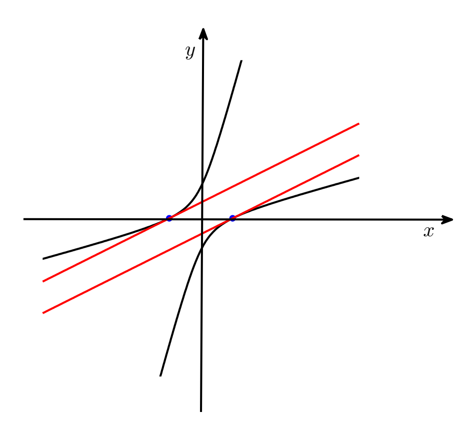


Figura 10: Gráfica de $1 - x^2 - y^2 + 4xy = 0$.

Ejemplo. *Sea P un punto propio. Dar un ejemplo de una cónica $\mathcal{C}$ que tenga como único punto singular al punto P y que contenga los puntos $M = (0,3,1)$ y $N = (-1,2,0)$. ¿Es única la solución?*

Los puntos singulares son aquéllos en los que se cortan las rectas en que degeneran las cónicas.

Tomamos un punto propio cualquiera, por ejemplo el punto $P(0,0,1)$. Calculamos las rectas MP y NP

$$MP \equiv x = 0, \quad NP \equiv 2x + y = 0$$

Una cónica que verifica las condiciones del enunciado es

$$x(2x + y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + xy = 0$$

La libre elección de P demuestra la existencia de infinitas cónicas que verifican las condiciones del enunciado.

Ejemplo. *Sea la cónica cuya ecuación respecto de una referencia ortonormal es:*

$$C_1 \equiv 2xy - 10x + 2y + 2 = 0$$

a) *Hallar el diámetro conjugado d de d', siendo d' el diámetro paralelo a la recta $r \equiv 2x + y - 1 = 0$*

La matriz asociada a la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El centro de la cónica es

$$C \equiv (|A_{13}|, |A_{23}|, |A_{33}|) = (1, 5, -1) \equiv (-1, 5, 1) \equiv (-1, 5)$$

Si d' es el diámetro paralelo a la recta r sigue que $d' \equiv 2x + y + \alpha = 0$ y si pasa por el centro $C(-1, 5)$ entonces us ecuación es

$$d' \equiv 2x + y - 3 = 0$$

El punto del infinito del diámetro d' es $P_\infty = (-1, 2, 0)$ entonces el diámetro d será conjugado al diámetro d', esto es,

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow d \equiv 2x - y + 7 = 0$$

b) *Si P es el punto de coordenadas $x = 1/3$, $y = 1$, $t = 1$ determinar las rectas tangentes a la cónica que pasan por P.*

La recta polar de P es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

La intersección de P con la cónica es

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y - 1 = 0 \\ 2xy - 10x + 2y + 2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow Q_1 = (0, -1),\ Q_2 = (1, 2)$$

Entonces tenemos que una tangente es la polar del punto Q_1

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - y - 1 = 0$$

y la otra tangente es la polar del punto Q_2

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -5\\ 1 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 1 = 0$$

c) *Hallar la cónica C' sabiendo que*:

- $Q(1,0,1) \in C'$;
- *la recta polar de Q respecto a C' es $x + y - 1 = 0$;*
- *la recta $2x + y - 1 = 0$ es una asíntota;*
- *los puntos $A(0,0,1)$, $B(0,5/3,1)$ son conjugados respecto de la cónica C'.*

El punto impropio de la asíntota $2x + y - 1 = 0$ es $T_\infty = (-1, 2, 0)$

La recta que pasa por T_∞ y Q

$$\begin{pmatrix}x & y & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow s \equiv 2x + y - 2 = 0$$

El haz de cónicas que pasan por la rectas en los puntos de corte con otra es

$$H \equiv r_1 r_2 + \lambda s^2 = 0 \Rightarrow (x + y - 1)(2x + y - 1) + \lambda(2x + y - 2)^2 = 0$$

como A y B son conjugados

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 + 4\lambda & \frac{3+4\lambda}{2} & -\frac{3+8\lambda}{2}\\ \frac{3+4\lambda}{2} & 1 + \lambda & -1 - 2\lambda\\ -\frac{3+8\lambda}{2} & -1 - 2\lambda & 1 + 4\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{5}{3}\\ 1\end{pmatrix} = 0$$

se encuentra que $\lambda = 1$ y la cónica que buscamos es

$$C' \equiv 6x^2 + 2y^2 + 7xy - 11x - 6y + 5 = 0$$

d) *Clasificar la cónica C y obtener una referencia respecto de la cual la cónica tenga expresión canónica*

$$C \equiv 2xy - 10x + 2y + 2 = 0$$

Es una cónica no degenerada porque $|A| \neq 0$, y además $|A_{33}| = -1 < 0$. Entonces es una hipérbola real. Su centro es $(-1, 5)$.

$$\text{los ejes} \left\{ \begin{array}{l} x - y + 6 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{las asíntotas} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 5 \end{array} \right.$$

La ecuación reducida es:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Usando invariantes métricos

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| = ABC \\ |A_{33}| = AB \\ a_{11} + a_{22} = A + B \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 12 \end{array} \right.$$

En la nueva referencia la ecuación reducida es

$$-X^2 + Y^2 + 12 = 0$$

y la referencia nueva $R' = \left\{ O' = (-1, 5); B' = \left\{ \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} \right\} \right\}$ siendo $(1, 1)$ y $(1, -1)$ las direcciones de los ejes, véase la figura 11.

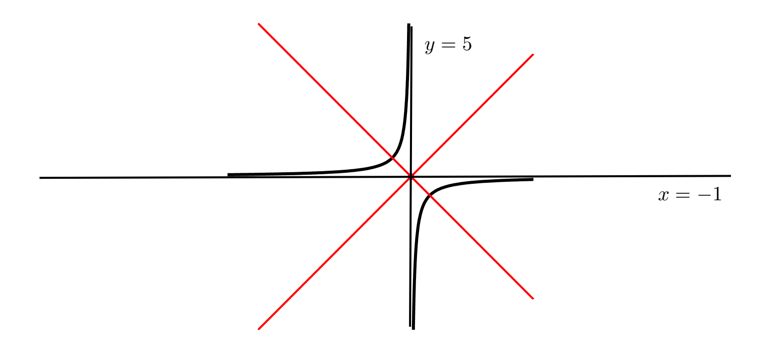


Figura 11: Gráfica de $2xy - 10x + 2y + 2 = 0$ con sus ejes.

Ejemplo. *En el plano afín ordinario y respecto de una referencia ortonormal se considera el siguiente haz de cónicas*

$$H \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2\lambda xy = 0$$

a) *Clasificar todas las cónicas del haz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2\lambda - 2$$

Si $2\lambda - 2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1$ la cónica es no degenerada.

Si $\lambda = 1$ la cónica es degenerada.

$$|A_{33}| = 1 - \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} |A_{33}| = 0 & \lambda = \pm 1, \text{ si } \lambda = -1 \text{ parábola real} \\ |A_{33}| > 0 & \lambda \in (-1, 1) \text{ elipse real} \\ |A_{33}| < 0 & \lambda \in (\infty, -1) \cup (1, \infty) \text{ hipérbola real} \end{cases}$$

b) *Hallar el centro de la cónica del haz que pasa por el punto* $P = (1, -1)$

Si $x = 1, y = -1$ tenemos que $\lambda = 1$. La cónica se reduce a

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0 \Rightarrow (x + y)(x + y + 2) = 0$$

El centro será la intersección de las dos rectas en las que degenera la parábola

$$C \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C = (-1, 1, 0)$$

c) *Si C es la cónica de H correspondiente a $\lambda = 2$, hallar sus asíntotas y los diámetros que sean ortogonales a dichas asíntotas.*

$$C_{\lambda=2} \equiv x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y = 0$$

Calculamos las polares de los puntos impropios

$$P_\infty = (\alpha, \beta, 0) \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0$$

Tenemos que $\alpha = -2+\sqrt{3}$ y $\alpha = -2-\sqrt{3}$. Ahora calculamos las polares de estos puntos

$$\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x+(2\sqrt{3}-3)y+(\sqrt{3}-1) = 0$$

La otra asíntota es

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\sqrt{3}x+(-2\sqrt{3}-3)y+(-\sqrt{3}-1) = 0$$

Los diámetros pasan por el centro y queremos que sean ortogonales a las asíntotas. El centro es $(1,1,-3) \equiv (-1/3,-1/3)$. La pendiente de la asíntota es

$$m = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} \quad m_{\perp} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$$

Entonces la ecuación de un diámetro será:

$$y+\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

De la misma manera encontramos la ecuación del otro diámetro

$$y+\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

d) *Encontrar la expresión de todas las cónicas que son tangentes a la cónica $C_{\lambda=2}$ en sus vértices.*

$$C_{\lambda=2} \equiv x^2+y^2+4xy+2x+2y = 0$$

La ecuación del haz pedido será

$$H_1 \equiv tg_1 tg_2 + \lambda r^2 = 0$$

Calculamos los ejes de la hipérbola

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 1$$

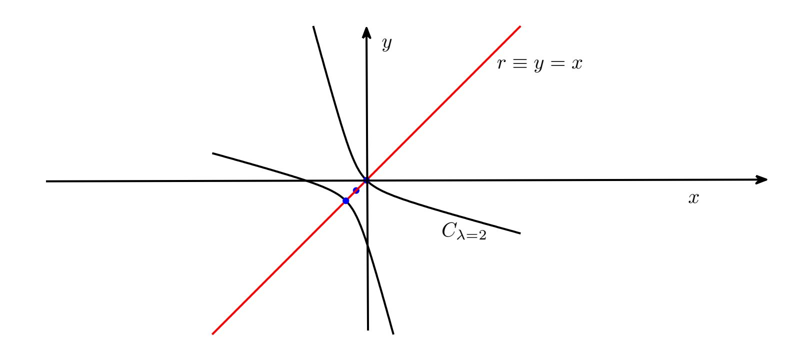


Figura 12: $C_{\lambda=2} \equiv x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y = 0$

Los ejes son rectas que pasan por el centro de la cónica $C(-1/3, -1/3)$. La ecuación del eje que nos interesa es

$$y + \frac{1}{3} = 1\left(x + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y = x$$

Los vértices de la cónicas son la intersección de la cónica con el eje

$$C_{\lambda=2} \cap \{y = x\} \Rightarrow V_1 = (0, 0), V_2 = (-2/3, -2/3)$$

Se calculan las polares de los vértices.

La polar del vértice $V_1 = (0, 0)$ es $x + y = 0$.

La polar del vértice $V_2 = (-2/3, -2/3)$ es $x - y - 4 = 0$.

Finalmente la ecuación del haz es:

$$H_1 \equiv (x - y - 4)(x + y) + \lambda(x - y)^2 = 0.$$

Referencias

[1] Eugenio Hernández, *Álgebra y geometría*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[2] Agustín de la Villa, *Problemas de Álgebra*, CLAGSA, 2010.

[3] Eugenia Rosado, *Espacio proyectivo real. Cónicas*, Instituto Juan de Herrera, ETSAM, Cuaderno 302.01, 2010.

[4] José Luis Pinilla, *Cónicas, cuádricas, curvas y superficies*, Varicop, 1970.

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

